## הגדרה

יהי $X$ מ"ט, $A \subseteq X$.
הפנים של $A$, שמסומן $\overset{\circ}{A}$ מוגדר כך:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ is open}}} U$$

## תכונות

1. $\overset{\circ}{A} \subseteq A$
2. $\overset{\circ}{A}$ פתוחה
3. אם $U \subseteq A$ פתוחה, אז $U \subseteq \overset{\circ}{A}$(כלומר $\overset{\circ}{A}$ הקבוצה הפתוחה המקסימלית המוכלת ב$A$)

שלושת התכונות הללו מאפיינות את $\overset{\circ}{A}$.
ע"י מעבר למשלימים:

$$\overset{\circ}{A} = \left(\overline{(A^c)}\right)^c$$

הוכחה: תרגיל

## הגדרה

יהי $X$ מ"ט, $A \subseteq X$.
$A$ יקרא צפוף ב$X$ אם $\overline{A} = X$.
כלומר $A$ צפופה ב$X$ אם"ם כל קבוצה פתוחה לא ריקה חותכת את $A$.

---

$X$ מ"ט, $A \subseteq B \subseteq X$.

- ניתן להביט בסגור של $A$ ב$X$ אותו נסמן כעת $\overline{A}^X$
- ניתן להביט בסגור של $A$ ב$B$ אותו נסמן כעת $\overline{A}^B$

מה הקשר בין $\overline{A}^X$ ל$\overline{A}^B$?

$$\overline{A}^B = \bigcap_{\substack{A \subseteq S \subseteq B \\ S \text{ is close in } B}} S = \bigcap_{\substack{Q \text{ is cloes in } X \\ A \subseteq Q}} = \left( \bigcap_{\substack{Q \text{ is close in } X \\ A \subseteq Q}} Q \right) \cap B = \overline{A}^X \cap B$$

(בחיתוך השני, לכאורה היינו צריכים לכתוב $A \subseteq Q \cap B$, אולם $A \subseteq Q \cap B$ אם"ם $A \subseteq Q$)

## דוגמה

$$X=\mathbb{R} \qquad B=(0,1) \qquad A=\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{A}^X=\left[0,\frac{1}{2}\right] \qquad \overline{A}^B=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

## עוד דוגמה

$$\begin{array}{ccccc} A & \subseteq & B & \subseteq & X \\ (0,1)\cap\mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{Q} & \subseteq & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\overset{\circ}{A}{}^X=\emptyset \qquad \overset{\circ}{A}{}^B=A$$

## הערה

$A$ פתוחה אם"ם $\overset{\circ}{A}=A$

(דומה לטענה בשבוע שעבר ש$A$ סגורה אם"ם $\overline{A}=A$)

## טענה

$$\overset{\circ}{A}{}^B\supseteq\overset{\circ}{A}{}^X$$

### הוכחה

אם $U\subseteq A$ פתוחה ב$X$, אז ודאי $U$ פתוחה ב$B$. לכן האוסף המשותף באיחוד המגדיר את $\overset{\circ}{A}{}^B$ מוכל באוסף המשותך באיחוד המגידר את $\overset{\circ}{A}{}^X$.

## טענה

$$A\subseteq B\subseteq X$$

אזי $A$ צפופה ב$B$ אם"ם $\overline{A}^X\supseteq B$

### הוכחה

$A$ צפופה ב$B$ אם"ם $\overline{A}^B = B$, אם"ם $\overline{A}^X \cap B = B$, אם"ם $\overline{A}^X \supseteq B$.

## הגדרה

כיסוי פתוח של $X$ הוא אוסף $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות ב$X$ כך ש$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = X$

## משפט

יהיו $X, Y$ מ"ט, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $X$, $f : X \to Y$ פונקציה. אזי $f$ רציפה אם"ם $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ רציפה לכל $\alpha \in I$.

### פתרון

$\Leftarrow$ אם $f$ רציפה אז $f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha$.

$\Rightarrow$ נניח $f|_{U_\alpha}$ רציף לכל $\alpha$. נראה ש$f$ רציף.
תהי $U \subseteq Y$ פתוחה, צ"ל $f^{-1}(U)$ פתוחה. מתקיים:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha\in I} \left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(U)$$

כיוון ש$f|_{U_\alpha}$ רציפה, $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה ב$U_\alpha$. אולם $U_\alpha$ פתוחה ב$X$, ולכן $f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ פתוחה גם ב$X$, ולכן האיחוד $\bigcup_{\alpha\in I} f|_{U_\alpha}^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה ב$X$.

## משפט

נניח $S_1, \dots S_n$ אוסף סופי של קבוצות סגורות ב$X$ כך ש$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = X$.
$f : X \to Y$ רציפה אם"ם $f|_{S_i} : S_i \to Y$ רציפה לכל $1 \le i \le n$

### הוכחה

כמו המשפט הקודם, שכן התנאי שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה שקול לתנאי שקבוצה הפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה.

## הגדרה

מ"ט $X$ נקרא <u>קשיר</u> אם לא קיימות $U, V \subseteq X$ פתוחות, זרות ולא ריקות כך ש$U \cup V = X$.

## הגדרות שקולות

- $X$ קשיר אם"ם לא קיימות קבוצות $K, L$ סגורות זרות ולא ריקות כך ש$K \cup L = X$
- $X$ קשיר אם"ם לא קיימת $\emptyset \neq A \neq X$ כך ש$A$ פתוחה וגם סגורה.

## הגדרה(לעת עתה)

נאמר שמ"ט מקיים את תכונת ערך הביניים אם לכל פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$ ולכל $a, b \in X$, אם $f(a) < t < f(b)$ אז יש $c \in X$ כך ש$f(c) = t$.

## דוגמה

$\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ערך הביניים.

## משפט

$X$ מקיים את תכונת ערך הביניים אם"ם $X$ קשיר.

### הוכחה

$\Leftarrow$ נניח $X$ לא מקיים את תכונת ערך הביניים. כלומר קיימת $f : X \to \mathbb{R}$ וקיימים $a, b \in X$ וקיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש$f(a) < t < f(b)$ ולכל $x \in X$, $f(x) \neq t$.
נגדיר $U = f^{-1}((t, \infty))$, $V = f^{-1}((-\infty, t))$. אזי $U, V$ פתוחות לא ריקות: כי $b \in U$, $a \in V$ זרות(כי $(t, \infty)$,$(-\infty, t)$ זרות) ואיחודן כל $X$, כי הנחנו שלכל $x \in X$ $f(x) \neq t \Leftarrow X$ לא קשיר.

$\Rightarrow$ נניח $X$ לא קשיר. יהיו $U, V$ פתוחות זרות לא ריקות כך ש$U \cup V = X$.
נגדיר $f : X \to \mathbb{R}$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

$f$ רציפה מהמשפט על "צמצום פוקנציה לכיסוי פתוח". מכאן ש$X$ לא מקיים את תכונת ערך הביניים.

## דוגמה

$\mathbb{Q}$ לא קשיר
דוגמה ל$U, V$:

$$U = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q} \qquad V = \left(\sqrt{2}, \infty\right) \cap \mathbb{Q}$$

## משפט

$\mathbb{R}$ קשיר

### הוכחה

השקילות שהוכחנו קודם +משפט ערך הביניים משנה א'

## טענה

$X$ קשיר אם"ם לא קיימת פונקציה רציפה מ$X$ <u>על</u> מרחב דיסקרטי בין שתי נקודות.

### הוכחה

זהה לשקילות שהוכחנו קודם.

## הערה

הסיבה שקודם הוכחנו שקילות שבה מופיעים העתקים ל$\mathbb{R}$ היא רק כדי לקשר למשפט ערך הביניים משנה א'.

## משפט

יהיו $X,Y$ מ"ט, $X$ קשיר, $f:X\to Y$ רציפה <u>ועל</u> $Y$. אזי $Y$ קשיר.

### הוכחה

נניח בשלילה $Y$ לא קשיר. כלומר קיימות $U,V\subseteq Y$ פתוחות זרות לא ריקות כך ש$U\cup V=Y$. $f^{-1}(U),f^{-1}(V)\subseteq X$, אזי הן פתוחות(כי $f$ רציפה), זרות(כי $U,V$ זרות), לא ריקות(כי $U,V$ לא ריקות ו$f$ על), וכן $f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=X$, כי

$$f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cup V)=f^{-1}(Y)=X$$

סתירה לקשירות $X$.

## נקבל כמסקנה משפט

יהיו $X,Y$ מ"ט, $X$ קשיר, $f:X\to Y$ רציפה. אזי $f(X)$ מרחב קשיר.

### הוכחה

ע"י צמצום הטווח נקבל פונקציה $f:X\to f(X)$, והיא גם על.

**במילים**: תמונה רציפה של מרחב קשיר היא מרחב קשיר.

## סיפור

נניח שאנו מעוניינים להראות ש$X$ קשיר, והצלחנו רק להראות שאיזהשהם תתי מרחבים של $X$ הם קשירים. מתי נוכל להסיק מכך ש$X$ כולו קשיר?

## למה קטנה

יהי $X$ מ"ט, $U,V$ קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות כך ש$U\cup V=X$, ונניח $A\subseteq X$ תת מרחב קשיר. אזי $A\subseteq U$ או $A\subseteq V$

### הוכחה

נניח בשלילה שלא, אזי $A \cap U \neq \emptyset$ וגם $A \cap V \neq \emptyset$. אזי הזוג $A \cap U$ וגם $A \cap V$ סותרים את קשירות $A$.
(אלה שתי קבוצות ב$A$ פתוחות ב$A$ זרות ולא ריקות שאיחודן $A$)

## טענה 1

יהי $X$ מ"ט, אזי $X$ קשיר אם"ם לכל $a, b \in X$ יש תת מרחב קשיר $A$ כך ש$a, b \in A$.

### הוכחה

$\Rightarrow$ נניח בשלילה ש$X$ לא קשיר. אזי יש $U, V$ פתוחות זרות לא ריקות כך ש$U \cup V = X$. ניקח $a \in U, b \in V$. מההנחה יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש$a, b \in A$. מצד שני מהלמה $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$ - סתירה.

$\Leftarrow$ נניח $X$ קשיר אזי לכל $a, b$ ניקח $A = X$.

## טענה 2

אם $A, B \subseteq X$, $A, B$ קשירים, $A \cap B \neq \emptyset$ אזי $A \cup B$ קשיר.

### הוכחה

נניח בשלילה $A \cup B$ לא קשיר. אזי יש שתי קבוצות פתוחות ב$A \cup B$ זרות ולא ריקות כך ש$U \cup V = A \cup B$. אזי מהלמה עבור $A \cup B$ מתקיים $A \subseteq U$ או $A \subseteq V$, ובאותו אופן $B \subseteq U$ או $B \subseteq V$.
האם ייתכן ש$A \subseteq U$ וגם $B \subseteq U$? לא! כי את $A \cup B \subsetneq U \subseteq A \cup B$. מכאן בה"כ $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ - סתירה לכך ש$A \cap B \neq \emptyset$.

## משפט

יהי $X$ מ"ט המקיים את התכונה הבאה: לכל $a, b \in X$ יש אוסף סופי $A_1, \dots A_n$ של תתי מרחבים קשירים של $X$ כך ש

$$a \in A_1 \qquad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, A_2 \cap A_3 \neq \emptyset, \dots A_{n-1} \cap A_n \neq \emptyset \qquad b \in A_n$$

אזי $X$ קשיר.

### הוכחה

לפי הטענה הקודמת, $A_1 \cup A_2$ קשיר, ולכן גם $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ קשיר, וכן הלאה. בסופו של דבר נקבל ש$A_1 \cup \dots \cup A_n$ קשיר. מתקיים: $a, b \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ לכן מהטענה הראשונה $X$ קשיר.

## מסקנה

אם $X$ מ"ט, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף של תתי מרחבים <u>קשירים</u> כך ש

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = X \qquad \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

אזי $X$ קשיר.

### הוכחה

נשתמש בטענה הקודמת.

יהיו $a,b\in X$. יש $\alpha$ כך ש$a\in A_\alpha$. יש $\beta$ כך ש$b\in A_\beta$. $A_\alpha\cap A_\beta\neq\emptyset$(כי החיתוך לא ריק) מכאן שמתקיים התנאי של הטענה המקורית עם השרשרת $A_\alpha, A_\beta$.

## משפט

יהי $X$ מ"ט, $A\subseteq X$ קבוצה צפופה שהיא תת מרחב קשיר. אזי $X$ קשיר.

### הוכחה

נניח בשלילה ש$X$ לא קשיר. אזי יש $U,V$ פתוחות זרות ולא ריקות כך ש$U\cup V=X$. נביט ב$U\cap A, V\cap A$. הן פתוחות ב$A$, זרות, איחודן $A$. שתיהן לא ריקות כי $A$ <u>צפוף</u>.

## משפט

הקטעים למיניהם ב$\mathbb{R}$ הם כולם קשירים

### למשל

$$(-\infty,b] \qquad (a,\infty) \qquad (a,b] \qquad [a,b)$$

### הוכחה

כבר הוכחנו ש$(-\infty,\infty)$ קשיר. $(-\infty,\infty)$ הומאומורפי לכל הקטעים הפתוחים למיניהם, לכן גם אלה קשירים.

מדוע $[a,b)$ קשיר? נביט ב$\underbrace{(a,b)}_{A}\subseteq\underbrace{[a,b)}_{B}$.

$$A\subseteq B\subseteq\mathbb{R} \qquad \overline{A}^{\mathbb{R}}\supseteq B$$

$A$ קשירה ו$A$ צפופה ב$B$, לכן $B$ קשיר.

## טענה

$[a,b)\,,(c,d)$ לא הומאומורפיזם.

## הוכחה

נניח בשלילה שיש הומאומורפיזם

$$h:[a,b)\to(c,d)$$

כלומר $h$ רציפה, וקיימת $g$ רציפה $g:(c,d)\to[a,b)$ כך ש$g\circ f=\mathrm{Id}$ $\quad f\circ g=\mathrm{Id}$.

**רעיון טופולוגי להמשך**

- עבור $[*,*)$, יש בדיוק נקודה אחת שאם זורקים זה נשאר קשיר
- עבור $(*,*)$, אין אף נקודה שאם זורקים זה נשאר קשיר
- עבור $[*,*]$, יש בדיוק שתי נקודות שאם זורקים זה נשאר קשיר

בגלל ההבדר הטופולוגי הזה הקטעים לא הומאומורפיזם.